COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI
Strada Costache Negri nr. 50, 700071, Iași
Tel: +40 332 418 760; Fax: +40 232 218 240
E-mail: contact@cnvais.ro
Web page: www.cnvais.ro
Operator de date cu caracter personal înregistrat la ANSPDCP cu nr. 15833

PROIECT DIDACTIC

Profesor: Oloeriu Alina-Adriana

A. Repere generale

Clasa: a XII-a

Disciplina: Matematică

Capitolul: Recapitulare pentru bacalaureat

Unitatea de învăţare: Recapitulare pentru bacalaureat

Subiectul lecţiei: Exerciţii tip BAC – subiectul III

Tipul lecţiei: Consolidare

B. Obiective

Competenţe generale:

1. *Folosirea terminologiei specifice matematicii în contexte variate de aplicare*
2. *Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural sau contextual, cuprinse în enunțuri matematice*
3. *Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice în rezolvarea de probleme*
4. *Exprimarea şi redactarea coerentă, în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme*
5. *Analiza de situații-problemă, în scopul descoperirii de strategii pentru optimizarea soluțiilor*
6. *Generalizarea unor proprietăți prin modificarea contextului inițial de definire a problemei sau prin generalizarea algoritmilor*

Competenţe specifice:

(XI)₁ **Caracterizarea** *unor şiruri şi funcţii utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare*

(XI)2 **Interpretarea** *unor proprietăţi ale şirurilor şi ale altor funcţii cu ajutorul reprezentărilor grafice.*

(XI)3 **Aplicarea** *unor algoritmi specifici calculului diferenţial în rezolvarea unor probleme şi modelarea unor procese*

(XI)4 **Exprimarea** *cu ajutorul noţiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăţi cantitative şi calitative ale unei funcţii*

(XI)5 **Studierea** *unor funcţii din punct de vedere cantitativ şi calitativ utilizând diverse procedee: majorări, minorări pe un interval dat, proprietăţile algebrice şi de ordine ale mulţimii numerelor reale în studiul calitativ local, utilizarea reprezentării grafice a unei funcţii pentru verificarea unor rezultate şi pentru identificarea unor proprietăţi*

(XI)6 **Explorarea** *unor proprietăţi cu caracter local şi/ sau global ale unor funcţii utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică*

(XII)1 **Identificarea** *legăturilor dintre o funcție continuă și derivata sau primitiva acesteia*

(XII)2 **Identificarea** *unor metode de calcul ale integralelor, prin realizarea de legături cu reguli de derivare*

(XII)3 **Utilizarea** *algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite*

(XII)4 **Explicarea** *opțiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluțiilor*

(XII)5 **Folosirea** *proprietăților unei funcții continue, pentru calcularea integralei acesteia pe un interval*

(XII)6.1 **Utilizarea** *proprietăților de monotonie a integralei în estimarea valorii unei integrale definite și în probleme cu conținut practic*

(XII)6.2 **Modelarea** *comportării unei funcții prin utilizarea primitivelor sale*

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI
Strada Costache Negri nr. 50, 700071, Iași
Tel: +40 332 418 760; Fax: +40 232 218 240
E-mail: contact@cnvais.ro
Web page: www.cnvais.ro
Operator de date cu caracter personal înregistrat la ANSPDCP cu nr. 15833

Obiective operaţionale:

a) Cognitive

La sfârşitul orei elevii vor fi capabili:

O$_1$ să calculeze derivata unor funcții date

O$_2$ să cunoască formulele şi să afle ecuațiile asimptotelor unei funcţii date

O$_3$ să stabilească continuitatea şi derivabilitatea unei funții

O$_4$ să stabilească diverse proprietăți ale unor funcții (monotonie, convexitate, concavitate, ecuația tangentei), folosind derivata de ordinul întâi şi doi

O$_5$ să enunțe şi să verifice legătura dintre o funcție continuă şi derivata sau primitiva acesteia

O$_6$ să calculeze integrala definită a unor funcții, folosind diverse metode de integrare

O$_7$ să rezolve exerciții cu șiruri de integrale, folosind proprietățile integralei definite și a monotoniei și mărginirii șirurilor

b) Formative

La sfârşitul orei elevii vor fi capabili:

- să prezinte într-o formă clară şi concisă etapele de rezolvare a exerciţiilor
- să transpună în limbaj matematic problemele propuse spre rezolvare

c) Afective

- Elevii să fie atenţi şi să participe activ la oră
- Elevii să-şi dezvolte interesul pentru matematică

C. Resurse educaţionale

I Conţinutul învăţării

I_1 Câmpul de informaţii: *Manualul de Matematică pentru clasele XI M1*, Marius Burtea, Georgeta Burtea, Editura Carminis Educational, Pitesti, 2006, *Manualul de Matematică pentru clasele XII M1*, Marius Burtea, Georgeta Burtea, Editura Carminis Educational, Pitesti, 2007

I_2 Informaţiile şi cunoştinţele care au legătură directă cu obiectivele stabilite*: calcule cu numere reale, ecuații în* $\mathbb{R}$, *monotonie, mărginită, convergența șirurilor, metode de calcul a limitelor, asimptote, derivate, ecuația tangentei, șirul lui Rolle, primitive, metode de calul a integralelor definite, proprietăți ale integralei definite*

I_3 Platformele prezentate la cursul de formare **Web 2.0 in Mathematics Classroom**, în cadrul programului Erasmus+ KA121 School Education learning mobility Atena, Grecia 10 -14.07.2023:

- https://www.desmos.com/calculator
- https://wordwall.net/ - Random Wheel

II Resurse materiale

II_1 Timpul afectat: 50 minute

II_2 Materiale didactice:

- fișe de lucru
- televizor, computer, tabletă grafică
- tabla
- markere

III Strategie educaţională

III$_1$ *Metode de instruire* (**MI**):

- conversaţia (**Cv**)
- exerciţiul (**Ex**)
- expunerea (**Ep**)
- jocul didactic „Roata norocului”(**Rn**)

III$_2$ *Forme de organizare a clasei* (**FO**):

- activitate frontala (**Af**)

III$_3$ *Secvenţele activităţii didactice* (**S**)

- pregătirea clasei pentru lecţie (**S$_1$**)
- captarea atenţiei şi enunţarea obiectivelor urmărite (**S$_2$**)
- scurta recapitulare a materiei (**S$_3$**)
- rezolvare de probleme (**S$_4$**)
- aprecieri finale (**S$_5$**)

(**T**=timpul in minute pentru fiecare secvenţă)

D. Organizarea lecţiei

S	Activitatea profesorului	Activitatea elevilor	O	T	MI	FO
S$_1$	- verifică aspectului clasei - notează prezenţa elevilor	- raportează absenţii şi motivele absentării		1	Cv	Af
S$_2$	- comunică titlul lecţiei - enunţă obiectivele urmărite de lecţie	- notează titlul lecţiei - ascultă obiectivele lecţiei		2	Ep	Af
S$_3$	- împarte fișa *Completați cele 7 enunțuri din analiza matematică* - foloseste platforma *https://wordwall.net/ - Random Wheel*	- elevii nominalizați completează enunțurile matematice de pe fișă - completează răspunsul corect pe fișă	O$_2$ O$_3$ O$_4$ O$_5$ O$_7$	15	Cv Ep. Ex. Rn	Ai Af

	pentru stabilirea elevilor care vor răspunde la întrebări - completează fișa folosind tableta grafică - evaluează răspunsurile elevilor și îi ajută dacă e nevoie, oferindu-le indicii, sau solicitând ajutorul altor elevi	- elevul care a răspuns ajută la stabilirea persoanei care va răspunde la următoarea întrebare, folosind Random Wheel				
S_4	- propune spre rezolvare exerciţiile de pe fișa *Probleme tip BAC – subiectul III* - folosește, acolo unde e cazul, platforma https://www.desmos.com/calculator pentru realizarea unor grafice în vederea verificării, sau evidențierii unor proprietăți determinate în probleme - da indicatii, la nevoie, pentru rezolvarea problemelor - evaluează răspunsurile elevilor	- rezolva la tabla exercitiile propuse - adresează întrebări profesorului - răspund la întrebările adresate de profesor - notează în caiet rezolvările	O_1 O_2 O_3 O_5 O_6 O_7	30	Cv. Ex.	Af Ai
S_5	- face aprecieri legate de evoluția elevilor - comunică tema pentru acasă - dă indicaţii pentru temă	- notează tema pentru acasă		2	Cv	Af

S_3

Profesorul împarte fișa *Completați cele 7 enunțuri din analiza matematică* și deschide platforma *https://wordwall.net/* - *Random Wheel* care va ajuta la alegerea elevului care va completa enunțurile de pe fișă. **O_2 O_3 O_4 O_5 O_7**

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI
Strada Costache Negri nr. 50, 700071, Iași
Tel: +40 332 418 760; Fax: +40 232 218 240
E-mail: contact@cnvais.ro
Web page: www.cnvais.ro
Operator de date cu caracter personal înregistrat la ANSPDCP cu nr. 15833

Completați cele 7 enunțuri din analiza matematică:

1. Orice șir .... și .... este convergent. (**Teorema lui Weierstrass**)

2. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție astfel încât $+\infty$ este punct de acumulare al domeniului.

   Dreapta $\boldsymbol{y = l}, l \in \mathbb{R}$ *este* ***asimptotă orizontală spre*** $+\infty$ *pentru graficul funcției* f *dacă* .... *Analog se definește* ***asimptota orizontală*** spre $-\infty$.

   Dreapta .... *este* ***asimptota oblică spre*** $+\infty$ *la graficul funcției* f *dacă* $\boldsymbol{m} = \lim\limits_{x\to}$ ... ... *și* $\boldsymbol{n} = \lim\limits_{x\to}$ [... ... ...]. *Analog se definește* ***asimptota oblică*** spre $-\infty$.

   Fie $f: D \to \mathbb{R}$ *o funcție, iar* a *un punct de acumulare al domeniului. Dreapta* $\boldsymbol{x = a}$ *este* ***asimptotă verticală la stânga*** *pentru graficul funcției* f *dacă* $\lim\limits_{\substack{x\to \\ x}} f(x) =$. ... ... *Analog se definește* ***asimptota verticală la dreapta***.

3. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție, iar $x_0 \in D$ un punct de acumulare al domeniului.

   $\boldsymbol{f}$ **continuă în** $\boldsymbol{x_0} \Leftrightarrow$. ... ...

4. Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcției admite **tangentă** în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$. Ecuația tangentei este ...., iar $f'(x_0)$ este ....

5. **Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor**

   Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}, a < b$ o funcție de două ori derivabilă pe $[a, b]$.

   Dacă $f''(x) \geq 0, \forall\, x \in [a, b]$, *atunci* f *este* .... *pe* $[a, b]$.

   Dacă $f''(x) \leq 0, \forall\, x \in [a, b]$, *atunci* f *este* .... *pe* $[a, b]$.

6. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție. O funcție $F: I \to \mathbb{R}$ se numește **primitivă a lui** $\boldsymbol{f}$
   dacă F este .... pe I și ....
   Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\int f(x)dx$ ... ..., unde $\mathcal{C} = \{c: I \to \mathbb{R} / c \text{ este funcție constantă}\}$.

7. **Câteva proprietăți ale integralei**

   a) Dacă $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ ... ... ***(pozitivitatea integralei)***

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI
Strada Costache Negri nr. 50, 700071, Iași
Tel: +40 332 418 760; Fax: +40 232 218 240
E-mail: contact@cnvais.ro
Web page: www.cnvais.ro
Operator de date cu caracter personal înregistrat la ANSPDCP cu nr. 15833

b) $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ atunci $\int_a^b f(x)dx \ldots . \int_a^b g(x)dx$ ***(monotonia integralei)***

c) Dacă $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,\ b]$, atunci

.....................$\leq \int_a^b f(x)dx \leq$........................ ***(proprietatea de medie a integralei)***

S4

Profesorul împarte fișa *Probleme tip BAC – subiectul III* și propunde spre rezolvare câteva exerciții. **O1 O2 O3 O4 O5 O6 O7**

Probleme tip BAC - subiectul III

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x$.
   a) Arătați că $f'(x) = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{x^2+2x+4}}, x \in (0, +\infty)$.
   b) Determinați ecuația asimptotei la graficul lui f spre $+\infty$.
   c) Demonstrați că pentru orice $a \in (1, 2)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.
   a) Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)},\ x \in (0, +\infty)$.
   b) Arătați că f este convexă pe $(0, +\infty)$.
   c) Calculați $\lim_{n\to\infty}(f(1) + f(2) + \cdots + f(n))^n$.
3. Fie $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$.
   a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{(x^2+3x+2)^2}, x \in [0, +\infty)$.
   b) Demonstrați că $\frac{1}{2} \leq f(x) < 2, \forall x \in [0, +\infty)$.
   c) Determinați valorile lui $x \in [0, +\infty)$ pentru care $f(x)$ este numărul întreg.
4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$.
   a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
   b) Găsiți punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{4}$.
   c) Calculați $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+1}$.
5. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$.
   a) Arătați că $f'(x) = \frac{(2x-3)\sqrt{x(x-1)}}{2(x-1)^2}, x \in (1, +\infty)$.
   b) Determinați punctul de minim al graficului funcției f.

c) Calculați $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x$.

6. Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.
   a) Arătați că $f'(x)=-\frac{2}{x(2+x)}, x\in(0,+\infty)$.
   b) Determinați ecuațiile asimptotelor funcției.
   c) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq1}$ definit prin $x_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n), \forall n\geq1$ este divergent.
7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xarctg\ x-ln(1+x^2)$.
   a) Arătați că $\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=0$.
   b) Arătați că f' este mărginită.
   c) Demonstrați că $xarctg\ x\geq ln(1+x^2), \forall x\in\mathbb{R}$.
8. Se consideră $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$.
   a) Arătați că $\int_1^2\sqrt{x}f(x)dx=ln\frac{3}{2}$.
   b) Arătați că $\int_1^3 f(x)dx=\frac{\pi}{6}$.
   c) Demonstrați că $I_{n+1}+I_n=\frac{2}{2n+1}\left(2^n\sqrt{2}-1\right)$, unde $I_n=\int_1^2 x^n f(x)dx, n\in\mathbb{N}^*$.
9. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x-\frac{1}{x}$ și $g(x)=(x-1)e^x-\ln x+1$.
   a) Arătați că g este o primitivă a funcției f.
   b) Arătați că $\int_1^e f(x)dx=(e-1)e^e-1$.
   c) Arătați că $\int_1^e f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}\left(g^2(e)-g^2(1)\right)$.
10. Se consideră funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ \frac{1}{x^3}, & x\in(1,2]\end{cases}$.
   a) Arătați că f admite primitive pe $[0,2]$.
   b) Arătați că $\int_0^2 f(x)dx=\frac{7}{8}$.
   c) Determinați $a\in[0,1]$, știind că $\int_0^a f(x)dx=\int_a^2 f(x)dx$.
11. Fie $I_n=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{1}{x^n(x^2+1)}dx, n\in\mathbb{N}$.
   a) Arătați că $I_0=\frac{\pi}{12}$.
   b) Arătați că $I_1=\frac{1}{2}\ln 2$.
   c) Arătați că $\lim_{x\to\infty}I_n=+\infty$.
12. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$ și șirul $(I_n)_{n\geq1}$ definit prin $I_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$.
   a) Arătați că $I_n=\ln\frac{n+1}{n}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.
   b) Demonstrați că $I_n\geq I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.
   c) Calculați $\lim_{n\to\infty}nI_n$

13. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.
   a) Arătați că $I_1 = \frac{1}{4}$.
   b) Arătați că $I_n \geq I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
   c) Demonstrați că $I_n \leq \frac{1}{4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
14. Fie șirul $(I_n)_{n\geq1}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+3}dx$.
   a) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq1}$ este convergent.
   b) Arătați că $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
   c) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ și că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{6}$.
15. Fie funcția $f: \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{cos^2 t}dt$.
   a) Arătați că $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}ln2 - \frac{\pi}{4}$.
   b) Arătați că f este strict crescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
   c) Arătați că $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

S6

Tema pentru acasă: exercițiile de pe fișă ce nu au fost rezolvate in clasă.

Bibliografie:

– Programa şcolară pentru clasa a XI a aprobată prin OM nr. 3252/13.02.2006, Programa şcolară pentru clasa a XII-a aprobată prin OM nr. 5959/22.12.2006 și Programa şcolară pentru Examenul de Bacalaureat la matematică aprobată prin Ordinul ministrului educaţiei nr. 3.237/2021
– „*Probleme de matematică pentru clasa a XI-a: consolidare*", ed. a 5-a, Dragomir L., Dragomir A., Bădescu O., Ed. Paralela 45, Pitești 2019
– „*Probleme de matematică pentru clasa a XII-a: cu 10 teste pentru bacalaureat după modelulM. E. N. - consolidare*", ed. a 3-a, Dragomir L., Dragomir A., Bădescu O., Ed. Paralela 45, Pitești 2019
– „*Bacalaureat 2022: matematică M_mate-info : teme recapitulative: 65 de teste, după modelul M. E. : breviar teoretic*", Zanoschi A., Iurea G., Popa G., Ed. paralela 45, Pitești, 2021